PCSI 1
2009-2010

Colle 9 deuxième semaine

Du 22/02 au 26/02

1 Révision sur les sommes

Changement d'indice, sommes télescopiques, formule du binôme de Newton...

2 Ensembles finis et dénombrements

- Définition d'un ensemble fini et infini. Cardinal d'un ensemble fini, unicité (démontré).
- S'il existe une bijection de E dans F et que E est fini alors F est fini de même cardinal (démontré). Toute partie d'un ensemble fini est finie de cardinal inférieur (admis).
- Soit $f : E \to F$. Si f est injective et que F est fini alors E est fini et $\text{card}E \leq \text{card}F$. Si f est surjective et E fini alors F est fini et $\text{card}E \geq \text{card}F$. Si E et F sont finis de même cardinal alors f bijective équivaut à f injective équivaut à f surjective.(le premier démontré les deux autres admis)
- Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.(admis)
- Pour A et B deux ensembles finis, formules donnant $\text{card}A \cup B$ et $\text{card}A \setminus B$.(admis)
- Cardinal de $E \times F$ (démontré) et de F^E (admis) avec E et F finis. Groupe des permutations et son cardinal (admis).
- Arrangements dans un ensembles fini. Dénombrement du nombre d'injections entre deux ensembles finis.(admis)
- Combinaisons dans un ensemble fini.
- Nombre de parties d'un ensemble fini.(démontré)

3 Continuité et dérivabilité

- Définition de la continuité en un point. Continuité à gauche, à droite, sur un intervalle.
- Prolongement par continuité en un point.
- Caractérisation séquentielle de la continuité (démontré). Application à la résolution de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ avec $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Opérations sur la continuité. Composition.
- Théorème des valeurs intermédiaires (démontré mais cf remarque). Algorithme de dichotomie pour la recherche d'un zéro d'une fonction continue.
- L'image d'un segment par une application continue est un segment (admis). Cas des applications strictement monotones.
- Théorème de la bijection : pour une fonction continue, être strictement monotone équivaut à être injective et donc bijective sur son image (démontré). Alors la fonction réciproque est continue et strictement monotone (admis).
- Définition des fonctions lipschitziennes. Les fonctions lipschitziennes sont continues.
- Continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Définition de la dérivabilité en un point. Elle implique la continuité. Tangente. Dérivabilité à gauche et à droite et sur un intervalle.
- Opérations somme, produit, multiplication par un scalaire, quotient et composition de fonctions dérivables.
- Dérivabilité d'une fonction réciproque, expression de la dérivée (démontré).
- Extremum local et dérivée (démontré).
- Théorème de Rolle (démontré).

- Egalité et inégalité des acroissements finis (démontré). Traduction en terme de fonctions lipschitziennes.
- Constance, monotonie et dérivabilité (démontré).
- Continuité d'une dérivée : f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b]$. Si f' admet une limite finie en a alors f est dérivable en a et f' est continue en a (démontré).
- Utilisation des accroissements finis pour obtenir une vitesse de convergence exponentielle d'une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Définition des dérivées successives, des espaces $\mathcal{D}^k$, $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.
- Opérations sur les dérivées successives. Somme, produit (Leibniz), quotient, composée, fonction réciproque.
- Extension de la dérivabilité pour des fonctions à valeurs complexes. Inégalité des accroissements finis dans ce cadre.

La démonstration des valeurs intermédiaires a été vue mais n'est pas au programme des PCSI. L'algorithme de dichotomie par contre oui. Je rappelle que l'énoncé du théorème de Bolzano-Weierstrass a été vu mais n'est pas au programme (cf image d'un segment par une application continue). De même la continuité d'une réciproque n'a pas été démontrée. Enfin la continuité uniforme n'est pas au programme.